PROBLEMA 1

Sea $f: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \\ \\ 1 & \text{si} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

(a) Encuentre la serie de Fourier 2π-periódica para $f(x)$.
(b) Usando la serie hallada calcule la suma

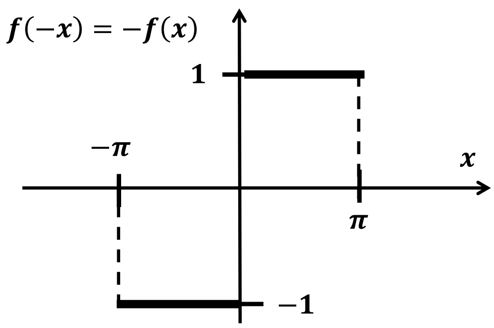
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

(c) Calcule el valor de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

SOLUCIÓN:

(a) La función $f: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función impar, por lo que su serie de Fourier 2π-periódica es una serie de Fourier-seno ($a_n = 0$).



Se calculan los coeficientes b_n tales que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \quad \text{donde} \quad b_n = \frac{\langle f(x), \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} x\right)\rangle}{\langle \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} x\right), \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} x\right)\rangle} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) dx$$

Para $T = 2\pi$ se calculan los coeficientes b_n:

$$b_n = \frac{\langle f(x), \operatorname{sen}(nx)\rangle}{\langle \operatorname{sen}(nx), \operatorname{sen}(nx)\rangle} = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} 1 \cdot \operatorname{sen}(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\, dx = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos(nx)}{n} \Bigg|_{0}^{\pi} = -\frac{2}{\pi n} (\cos(\pi n) - \cos(0)) =$$

$$= \frac{2}{\pi n} (1 - \cos(\pi n)) = \frac{2}{\pi n} \left(2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) = \frac{4}{\pi n} \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Y la serie de Fourier 2π-periódica en $(-\pi, \pi)$ para $f(x)$ es:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n} \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \operatorname{sen}(nx)$$

(b) Se aplica el teorema de la convergencia puntual en $x = \pi/2$, como $f(x)$ es continua en este punto, entonces la serie de Fourier $\tilde{f}(x)$ converge en el mismo valor de la función $f(\pi/2)$:

$$\tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2} - h\right) + f\left(\frac{\pi}{2} + h\right)}{2} = \frac{f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + f\left(\frac{\pi}{2} + 0\right)}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n} \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + 0 + \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{3} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 0 + \cdots =$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

(c) Se utiliza la igualdad de Parseval

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 \, dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$$

Calculando la integral de $|f(x)|^2$ se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} |1|^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} dx = \frac{2}{\pi} \cdot \pi = 2$$

Por otro lado

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{4}{\pi n} \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right|^2 = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^4\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^4\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2} = \frac{\operatorname{sen}^4\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1^2} + 0 + \frac{\operatorname{sen}^4\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{3^2} + 0 + \cdots = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{16} \cdot 2 = \frac{\pi^2}{8}$$

PROBLEMA 2

(a) Desarrolle en serie de Fourier-seno π-periódica de la función $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ definida por

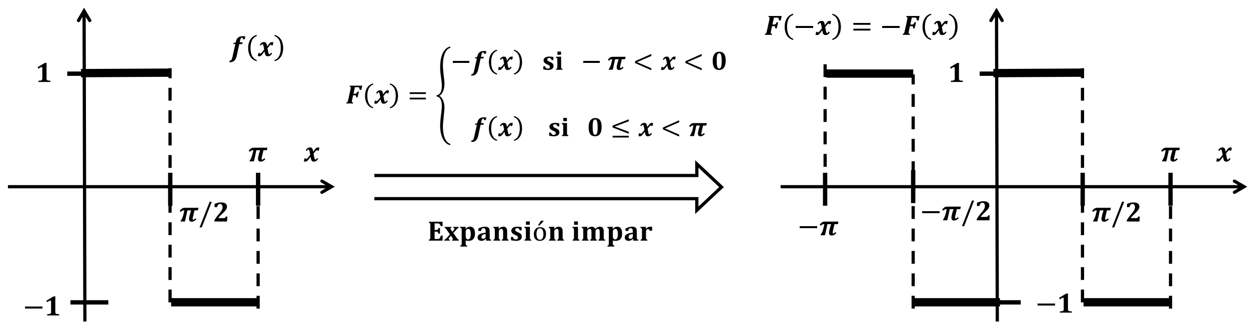
$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad 0<x\le \pi/2\\ -1 & \text{si} \quad \pi/2<x<\pi\end{cases}$$

(b) Usando la serie encontrada en la parte (a) hallada calcule las sumas de las series

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

SOLUCIÓN:

(a) La función $f(x)$ se extiende como una función impar en el intervalo $(-\pi,\pi)$ con período 2π.



Se calculan los coeficientes b_n tales que

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) \quad \text{donde} \quad b_n=\frac{\left\langle F(x),\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\right\rangle}{\left\langle \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right),\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\right\rangle}=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}F(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx$$

Para $T=2\pi$ se calculan los coeficientes b_n:

$$b_n=\frac{\langle F(x),\mathrm{sen}(nx)\rangle}{\langle \mathrm{sen}(nx),\mathrm{sen}(nx)\rangle}=\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx+\int_{\pi/2}^{\pi}f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}(nx)\,dx-\int_{\pi/2}^{\pi}\mathrm{sen}(nx)\,dx\right)=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos(nx)}{n}\bigg|_0^{\pi/2}+\frac{\cos(nx)}{n}\bigg|_{\pi/2}^{\pi}\right)=$$

$$\frac{2}{\pi n}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)+\cos(\pi n)-\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right)=\frac{2}{\pi n}\left(1-2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)+(-1)^n\right)$$

Y la serie de Fourier 2π-periódica en $(-\pi,\pi)$ para $f(x)$ es:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n}\left(1-2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)+(-1)^n\right)\operatorname{sen}(nx)$$

(a) Se aplica el teorema de la convergencia puntual en $x=\pi/4$, como $f(x)$ es continua en este punto, entonces la serie de Fourier $\tilde{f}(x)$ converge en el mismo valor de la función $f(\pi/4)$:

$$\tilde{f}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}-h\right)+f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)}{2}=\frac{f\left(\frac{\pi}{4}-0\right)+f\left(\frac{\pi}{4}+0\right)}{2}=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1 \quad\Rightarrow\quad 1=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1-2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)+(-1)^n\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1-2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)+(-1)^n\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)=0+\frac{2+2}{2}+0+0+0-\frac{2+2}{6}+\cdots=$$

$$=0+\frac{2}{1}+0+0+0-\frac{2}{3}+0+0+0+\frac{2}{5}+0+0+0-\frac{2}{7}+\cdots=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$1=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1-2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)+(-1)^n\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)\quad\Rightarrow\quad 1=\frac{2}{\pi}\cdot 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\quad\Rightarrow\quad\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

Para calcular la segunda serie se utiliza la igualdad de Parseval

$$\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|F(x)|^2\,dx=\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2+|b_n|^2)\qquad\Rightarrow\qquad\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(x)|^2\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2$$

Calculando la integral de $|F(x)|^2$ se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(x)|^2dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|f(x)|^2dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}|1|^2dx+\int_{\pi/2}^{\pi}|-1|^2dx\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}dx=\frac{2}{\pi}\cdot\pi=2$$

Por otro lado

$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\pi n}\left(1-2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)+(-1)^n\right)\right|^2=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|1-2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)+(-1)^n\right|^2}{n^2}=$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\left(0+\frac{16}{2^2}+0+0+0+\frac{16}{6^2}+0+0+0+\frac{16}{10^2}+\cdots\right)=\frac{16}{\pi^2}\cdot 2^2\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{10^2}+\cdots\right)=$$

$$=\frac{16}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)=\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=2\qquad\Rightarrow\qquad\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{16}\cdot 2=\frac{\pi^2}{8}$$

PROBLEMA 3

Una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cumple $f(x+2\pi) = f(x)$ y para $-\pi \le x \le \pi$ está dada por

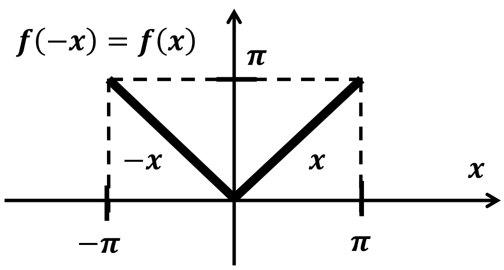
$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -\pi \le x < 0 \\ x & \text{si } 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

(a) Encontrar la serie de Fourier de $f(x)$.
(b) Calcular las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$$

SOLUCIÓN:

La función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función par, por lo que su serie de Fourier 2π-periódica es una serie de Fourier-coseno y los coeficientes $b_n = 0$.



Se calculan los coeficientes a_n tales que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \quad \text{donde} \quad a_n = \frac{\langle f(x), \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right)\rangle}{\langle \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right), \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right)\rangle} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) dx$$

Recordando la fórmula integral de integración por partes:

$$\int x\cos(ax)\, dx = \frac{x\,\text{sen}(ax)}{a} - \int \frac{\text{sen}(ax)}{a} dx = \frac{x\,\text{sen}(ax)}{a} + \frac{\cos(ax)}{a^2}$$

Para un período de $T = 2\pi$ se calculan los coeficientes a_n :

$$a_n = \frac{\langle f(x), \cos(nx)\rangle}{\langle \cos(nx), \cos(nx)\rangle} = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\,\text{sen}(nx)}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\text{sen}(nx)}{n} dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi \cdot \text{sen}(n\pi)}{n} - 0\right) + \frac{2}{\pi}\frac{\cos(nx)}{n^2}\Bigg|_0^{\pi} = 0 + \frac{2}{\pi n^2}(\cos(n\pi) - 1) = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{\text{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2}$$

El término independiente a_0 se encuentra evaluando en $n = 0$ la sucesión a_n:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}2\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi} = \pi$$

Y la serie de Fourier 2π-periódica en $(-\pi,\pi)$ para $f(x)$ es:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2}\cos(nx)$$

Se aplica el teorema de la convergencia puntual en $x = 0$, como $f(x)$ es continua en este punto, entonces la serie de Fourier $\tilde{f}(x)$ converge en el mismo valor de la función $f(0)$:

$$\tilde{f}(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0-h)+f(0+h)}{2} = \frac{f(0-0)+f(0+0)}{2} = f(0) = 0$$

$$f(0) = 0 \quad\Rightarrow\quad 0 = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2}\cos(n\pi\cdot 0) \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2} = \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1^2} + 0 + \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{3^2} + 0 + \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{5\pi}{2}\right)}{5^2} + \cdots$$

$$= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Para calcular la sumatoria se usa la igualdad de Parseval:

$$\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f(x)|^2\,dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2) \quad\Rightarrow\quad \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2$$

Se calcula primero el valor de la integral de $|f(x)|^2$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2 dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}|x|^2\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{\pi} = 2\cdot\frac{\pi^2}{3} = \frac{2}{3}\pi^2$$

Luego se calcula la serie de $|a_n|^2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx - \frac{|a_0|^2}{2} = \frac{2}{3}\pi^2 - \frac{|\pi|^2}{2} = \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\pi^2 = \frac{4-3}{6}\pi^2 = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2}\right|^2 = \frac{\pi^2}{6} \quad\Rightarrow\quad \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^4\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^4} = \frac{\pi^2}{6} \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^4\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^4} = \frac{\pi^4}{16\cdot 6} = \frac{\pi^4}{96}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^4\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^4} = \frac{\operatorname{sen}^4\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1^4} + 0 + \frac{\operatorname{sen}^4\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{3^4} + 0 + \frac{\operatorname{sen}^4\left(\frac{5\pi}{2}\right)}{5^4} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^4\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

PROBLEMA 4

Sea $f:(-1,1) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(\theta) = \theta^2$ si $|\theta| < 1$

(a) Halle la serie de Fourier 2-periódica para $f(\theta)$.
(b) Usando la parte (a) calcule las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

(c) Calcule el valor de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

SOLUCIÓN:

(a) La función $f(\theta) = \theta^2 = f(-\theta)$ es una función par, por lo tanto se desarrolla en serie de Fourier coseno 2-periódica en $(-1,1)$. Se calculan los coeficientes a_n tales que:

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}\theta\right) \quad \text{donde} \quad a_n = \frac{\langle f(\theta), \cos\left(\frac{2\pi n}{T}\theta\right)\rangle}{\langle \cos\left(\frac{2\pi n}{T}\theta\right), \cos\left(\frac{2\pi n}{T}\theta\right)\rangle} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(\theta)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}\theta\right) d\theta$$

Primero se deduce la fórmula de integración del producto de $f(\theta)$ y coseno realizando dos veces integración por partes:

$$\int x^2 \cos(kx)\,dx = \frac{x^2 \operatorname{sen}(kx)}{k} - \int \frac{2x \operatorname{sen}(kx)}{k} dx = \frac{x^2 \operatorname{sen}(kx)}{k} - \frac{2}{k}\left(-\frac{x\cos(kx)}{k} - \int -\frac{\cos(kx)}{k} dx\right) =$$
$$= \frac{x^2 \operatorname{sen}(kx)}{k} + \frac{2x\cos(kx)}{k^2} - \frac{2\operatorname{sen}(kx)}{k^3}$$

$$a_n = \frac{\langle f(\theta), \cos(\pi n\theta)\rangle}{\langle \cos(\pi n\theta), \cos(\pi n\theta)\rangle} = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(\theta)\cos(\pi n\theta)\,d\theta = \int_{-1}^{1} \theta^2 \cos(\pi n\theta)\,d\theta =$$

$$= 2\int_0^1 \theta^2\cos(\pi n\theta)\,d\theta = 2\left(\frac{\theta^2 \operatorname{sen}(\pi n\theta)}{\pi n} + \frac{2\theta\cos(\pi n\theta)}{(\pi n)^2} - \frac{2\operatorname{sen}(\pi n\theta)}{(\pi n)^3}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 2\left(\frac{1^2\cdot\operatorname{sen}(\pi n)}{\pi n} + \frac{2\cdot 1\cdot\cos(\pi n)}{(\pi n)^2} - \frac{2\cdot\operatorname{sen}(\pi n)}{(\pi n)^3}\right) - 2\left(\frac{0^2\cdot\operatorname{sen}(0)}{\pi n} + \frac{2\cdot 0\cdot\cos(0)}{(\pi n)^2} - \frac{2\cdot\operatorname{sen}(0)}{(\pi n)^3}\right) =$$

$$2\left(\frac{\operatorname{sen}(\pi n)}{\pi n} + \frac{2\cos(\pi n)}{(\pi n)^2} - \frac{2\operatorname{sen}(\pi n)}{(\pi n)^3}\right) = 2\left(\frac{0}{\pi n} + \frac{2(-1)^n}{(\pi n)^2} - \frac{2\cdot 0}{(\pi n)^3}\right) = \frac{4(-1)^n}{(\pi n)^2}$$

$$a_0 = \frac{\langle f(\theta), \cos(\pi\cdot 0\cdot\theta)\rangle}{\langle \cos(\pi\cdot 0\cdot\theta), \cos(\pi\cdot 0\cdot\theta)\rangle} = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(\theta)\,d\theta = \int_{-1}^{1}\theta^2\,d\theta = 2\int_0^1 \theta^2\,d\theta = 2\cdot\frac{1^3}{3} = \frac{2}{3}$$

Y la serie de Fourier 2-periódica en $(-1,1)$ para $f(\theta) = \theta^2$ es:

$$f(\theta) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{(\pi n)^2} \cos(\pi n\theta)$$

(b) Para calcular la primera serie, se aplica el teorema de la convergencia puntual en $\theta = 0$, como $f(\theta)$ es continua en este punto, entonces la serie de Fourier $\tilde{f}(\theta)$ converge en el mismo valor de la función $f(0)$:

$$\tilde{f}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0-h) + f(0+h)}{2} = \frac{f(0-0) + f(0+0)}{2} = f(0) = 0^2 = 0$$

$$f(0) = 0^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{(\pi n)^2} \cos(\pi n \cdot 0) \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Para calcular la segunda serie, se aplica el teorema de la convergencia puntual en el extremo del intervalo $\theta = 1$ el cual la serie de Fourier $\tilde{f}(\theta)$ converge en el valor medio de la función evaluada en los extremos $f(1-)$ y $f(-1+)$:

$$\tilde{f}(1) = \frac{\lim_{\theta\to 1^-} f(\theta) + \lim_{\theta\to -1^+} f(\theta)}{2} = \frac{f(1-0) + f(-1+0)}{2} = \frac{1^2 + (-1)^2}{2} = 1$$

$$\tilde{f}(1) = 1 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{(\pi n)^2} \cos(\pi n \cdot 1) \;\Rightarrow\; \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (-1)^n = 1 - \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n^2} = \frac{2\cdot\pi^2}{4\cdot 3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(c) Para calcular el valor de la última serie se utiliza la igualdad de Parseval

$$\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(\theta)|^2 d\theta = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} |f(\theta)|^2 \, d\theta = \frac{|2/3|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{4(-1)^n}{(\pi n)^2}\right|^2$$

Calculando la integral

$$\int_{-1}^{1} |f(\theta)|^2 \, d\theta = \int_{-1}^{1} |\theta^2|^2 \, d\theta = \int_{-1}^{1} \theta^4 \, d\theta = 2\int_{0}^{1} \theta^4 \, d\theta = 2\cdot\frac{1^5}{5} = \frac{2}{5}$$

Sustituyendo el valor de la integral y despejando la sumatoria

$$\frac{2}{2}\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{4/9}{2} + \frac{4^2}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right|^2 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{4^2}\left(\frac{2}{5} - \frac{1/9}{2}\right) = \frac{\pi^4}{4^2}\left(\frac{2}{5} - \frac{2}{9}\right) = \frac{2\pi^4}{4^2}\left(\frac{9-5}{45}\right) = \frac{2\pi^4}{4}\left(\frac{1}{45}\right) = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

PROBLEMA 5

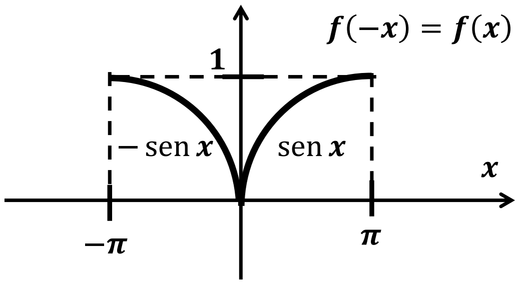
Sea $f(x) = |\text{sen}\, x|$ definida en el intervalo $-\pi < x < \pi$.

(a) Encuentre la serie de Fourier de $f(x)$.
(b) Usando la parte (a) calcular el valor de las siguientes series.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}$$

SOLUCIÓN:

(a) La función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función par, por lo que su serie de Fourier 2π-periódica es una serie de Fourier-coseno y los coeficientes $b_n = 0$.



Se calculan los coeficientes a_n tales que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) \quad \text{donde} \quad a_n = \frac{\langle f(x), \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\rangle}{\langle \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right), \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\rangle} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx$$

Poniendo $T = 2\pi$ se calculan los coeficientes a_n . Para resolver la integral se usa la fórmula de trigonométrica de integración deducida en el problema anterior:

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \text{sen}\,x\cos(nx)\,dx =$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left(\text{sen}\big((1+n)x\big) + \text{sen}\big((1-n)x\big)\right)dx = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\big((1+n)x\big)}{1+n} + \frac{\cos\big((1-n)x\big)}{1-n}\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos\big((1+n)\pi\big)}{1+n} + \frac{\cos\big((1-n)\pi\big)}{1-n}\right) + \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos(0)}{1+n} + \frac{\cos(0)}{1-n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos(\pi+n\pi)}{1+n} + \frac{1}{1+n} - \frac{\cos(\pi-n\pi)}{1-n} + \frac{1}{1-n}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos(n\pi)+1}{1+n} + \frac{\cos(n\pi)+1}{1-n}\right) =$$

$$= \frac{1+\cos(n\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n}\right) = \frac{1+\cos(n\pi)}{\pi}\left(\frac{1-n+1+n}{(1+n)(1-n)}\right) =$$

$$= \frac{1+\cos(n\pi)}{\pi}\cdot\frac{2}{1-n^2} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1+\cos(n\pi)}{1-n^2} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{1-n^2} = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{1-n^2}$$

El término independiente a_0 se encuentra evaluando en $n = 0$ la sucesión a_n:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = -\frac{2}{\pi}\cdot\cos x\,\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}$$

Y la serie de Fourier 2π-periódica en $(-\pi,\pi)$ para $f(x)$ es:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{1-n^2}\cos(nx)$$

(b) Se aplica el teorema de la convergencia puntual en $x = 0$, como $f(x)$ es continua en este punto, entonces la serie de Fourier de $f(x)$ converge en $f(0)$:

$$f(0) = 0 \quad\Rightarrow\quad 0 = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{1-n^2}\cos(n\cdot 0) \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2-1} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2-1} = 0 + \frac{1}{2^2-1} + 0 + \frac{1}{4^2-1} + 0 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$$

Para calcular la sumatoria se usa la igualdad de Parseval:

$$\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f(x)|^2\,dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) \quad\Rightarrow\quad \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2$$

Se calcula primero el valor de la integral de $|f(x)|^2$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}|\operatorname{sen} x|^2\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot x\,\Big|_0^{\pi} = 1$$

Luego se calcula la serie de $|a_n|^2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx - \frac{|a_0|^2}{2} = 1 - \frac{|4/\pi|^2}{2} = 1 - \frac{8}{\pi^2}$$

Por otro lado

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{1-n^2}\right|^2 = \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^4\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{(1-n^2)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^4\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{(1-n^2)^2} = \frac{1}{(1-2^2)^2} + \frac{1}{(1-4^2)^2} + \frac{1}{(1-6^2)^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}$$

$$\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^4\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{(1-n^2)^2} = 1 - \frac{8}{\pi^2} \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^4\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{(1-n^2)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$$

PROBLEMA 6

Para una cierta función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cumpliendo $f(x + 2\pi) = f(x)$ y $f(-x) = -f(x)$ resulta que

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\text{sen}(nx)\,dx = 2^{-n} \qquad \text{para} \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

Calcular el valor de la integral

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$$

SOLUCIÓN:

Como se cumple que $f(-x) = -f(x)$ entonces $f(x)$ es una función impar y la serie de Fourier $f(x)$ es una serie de Fourier seno ($a_n = 0$) . Debido a la ortogonalidad de las funciones seno en el intervalo $[0,2\pi]$ se tienen que los coeficientes b_n se calculan mediante

$$b_n = \frac{\langle f(x), \text{sen}(nx)\rangle}{\langle \text{sen}(nx)\,, \text{sen}(nx)\rangle} = \frac{\int_0^{2\pi} f(x)\,\text{sen}(nx)\,dx}{\int_0^{2\pi} |\text{sen}(nx)|^2 dx} = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\text{sen}(nx)\,dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\text{sen}(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot 2^{-n}$$

Usando la igualdad de Parseval en el intervalo $[0,2\pi]$:

$$\frac{2}{T}\int_0^{T} |f(x)|^2\,dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2$$

Recordando la serie geométrica, que sirve para calcular la serie de $|b_n|^2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \qquad \text{si} \quad |r| < 1$$

Calculando la integral de $|f(x)|^2$:

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx = \pi\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2 = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\pi}\cdot 2^{-n}\right|^2 = \frac{\pi}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}|2^{-n}|^2 = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(2^{-2})^n = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1-1}^{\infty}\frac{1}{4^{n+1}} = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{4-1}\right) = \frac{1}{3\pi}$$

PROBLEMA 7

Una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cumple $f(x+2\pi) = f(x)$ y para $-\pi \le x \le \pi$ está dada por

$$f(x) = \begin{cases} x(\pi + x) & \text{si} \quad -\pi \le x < 0 \\ \\ x(\pi - x) & \text{si} \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

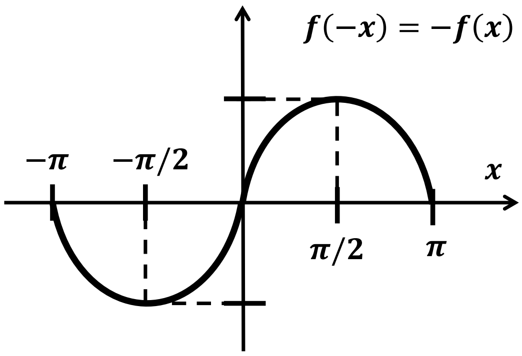
(c) Usando la parte (a) encuentre la serie de Fourier 2π-periódica para f.

(d) Demuestre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{16}{15}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\right)^2$$

SOLUCIÓN:

(a) La función $f: (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ es una función impar, por lo que su serie de Fourier 2π-periódica es una serie de Fourier-seno ($a_n = 0$).



Se calculan los coeficientes b_n tales que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) \quad \text{donde} \quad b_n = \frac{\langle f(x), \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\rangle}{\langle \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right), \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\rangle} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) dx$$

Para $T = 2\pi$ se calculan los coeficientes b_n . Para calcular la integral se utilizan propiedades de integración por distribuciones calculando la segunda derivada generalizada y definiendo $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad -\pi \le x \le \pi \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{\langle f(x), \operatorname{sen}(nx)\rangle}{\langle \operatorname{sen}(nx), \operatorname{sen}(nx)\rangle} = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\operatorname{sen}(nx)\, dx = \frac{2}{\pi}\langle F(x), \operatorname{sen}(nx)\rangle = \frac{2}{\pi}\langle F(x), -\frac{1}{n^2}\frac{d^2}{dx^2}(\operatorname{sen}(nx))\rangle =$$

$$= -\frac{2}{\pi n^2}(-1)^2\langle F''_{gen}(x), \operatorname{sen}(nx)\rangle = -\frac{2}{\pi n^2}\langle -2\cdot 1_{(0,\pi)}(x) + \pi\delta(x) + \pi\delta(x-\pi), \operatorname{sen}(nx)\rangle =$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}\langle 1_{(0,\pi)}(x), \mathrm{sen}(nx)\rangle - \frac{2}{n^2}\langle \delta(x) + \delta(x-\pi), \mathrm{sen}(nx)\rangle =$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}\int_{-\infty}^{\infty} 1_{(0,\pi)}(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx - \frac{2}{n^2}(\mathrm{sen}(n\cdot 0) + \mathrm{sen}(n\cdot\pi)) =$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi} \mathrm{sen}(nx)\,dx = -\frac{4}{\pi n^2}\cdot\frac{\cos(nx)}{n}\bigg|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi n^3}(1-\cos(nx)) = \frac{8}{\pi}\cdot\frac{\mathrm{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^3}$$

Y la serie de Fourier 2π-periódica para $f(x)$ es:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi}\cdot\frac{\mathrm{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^3}\mathrm{sen}(nx)$$

(b) Se aplica el teorema de la convergencia puntual en $x = \pi/2$, como $f(x)$ es continua en este punto, entonces la serie de Fourier de $f(x)$ converge en $f(\pi/2)$:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} \quad\Rightarrow\quad \frac{\pi^2}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi}\cdot\frac{\mathrm{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^3}\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}^3\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}^3\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^3} = \frac{1}{1^3} + 0 - \frac{1}{3^3} + 0 + \frac{1}{5^3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \qquad\Rightarrow\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

Para calcular la segunda serie se utiliza la igualdad de Parseval

$$\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f(x)|^2\,dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2) \qquad\Rightarrow\qquad \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2$$

Calculando la integral de $|f(x)|^2$ se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|f(x)|^2dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|x(\pi-x)|^2dx = \frac{\pi^4}{8}\int_0^1(1-x^2)^2dx = \frac{\pi^4}{15}$$

Por otro lado

$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{8}{\pi}\cdot\frac{\mathrm{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^3}\right|^2 = \frac{64}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}^4\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}^4\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^6} = \frac{1}{1^6} + 0 + \frac{1}{3^6} + 0 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^6} \qquad\Rightarrow\qquad \frac{64}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^4}{15}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^4}{15}\cdot\frac{\pi^2}{64} = \frac{\pi^6}{15\cdot 64} = \frac{32^2}{15\cdot 64}\left(\frac{\pi^3}{32}\right)^2 = \frac{32}{15\cdot 2}\left(\frac{\pi^3}{32}\right)^2 = \frac{16}{15}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\right)^2$$

PROBLEMA 8

Encuentre la función $u(x,y)$ en $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{si } 0 < x < \pi \ , \ 0 < y < \pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,y) = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u(x,\pi) = x \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Aplicando separación de variables. Sea $u(x,y) = X(x)Y(y)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)Y(y) \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X(x)Y''(y) \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda_n$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = X'(0)Y(y) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,y) = X'(\pi)Y(y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad X'(0) = X'(\pi) = 0 \quad \text{ya que} \quad Y(y) \neq 0$$

Se reescribe el problema de autofunciones como:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda_n X(x) = 0 \\ Y''(y) - \lambda_n Y(y) = 0 \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

CASO 1: $\lambda_n > 0$. Sea $\lambda_n = \zeta_n^2$ con $\zeta_n > 0$

$$X''(x) + \zeta_n^2 X(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = C_1 \cos(\zeta_n x) + C_2 \operatorname{sen}(\zeta_n x)$$

$$X'(x) = -\zeta_n C_1 \operatorname{sen}(\zeta_n x) + \zeta_n C_2 \cos(\zeta_n x)$$

$$X'(0) = 0 \ \Rightarrow \ 0 = -\zeta_n C_1 \operatorname{sen}(\zeta_n \cdot 0) + \zeta_n C_2 \cos(\zeta_n \cdot 0) \quad \Rightarrow \quad \zeta_n C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$X'(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = -\zeta_n C_1 \operatorname{sen}(\zeta_n \cdot \pi) + \zeta_n C_2 \cos(\zeta_n \cdot \pi) \quad \Rightarrow \quad \zeta_n C_1 \operatorname{sen}(\pi \zeta_n) = 0$$

Pero $C_1 \neq 0$ ya que se buscan soluciones no triviales.

Como $C_1 \neq 0$ y $\zeta_n \neq 0 \ \Rightarrow \ \operatorname{sen}(\pi\zeta_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi\zeta_n = n\pi \ \Rightarrow \ \zeta_n = n$ para $n = 1,2,3 \ldots$

$$Y''(y) - \zeta_n^2 Y(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(y) = K_1 \cosh(\zeta_n y) + K_2 \operatorname{senh}(\zeta_n y)$$

En este caso la familia de autofunciones viene dada por:

$$u_n(x,y) = C_1 \cos(\zeta_n x)\,(K_1 \cosh(\zeta_n y) + K_2 \operatorname{senh}(\zeta_n y))$$

$$u(x,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = C_1 \cos(\zeta_n x)\,(K_1 \cosh(\zeta_n \cdot 0) + K_2 \operatorname{senh}(\zeta_n \cdot 0)) \quad \Rightarrow \quad K_1 = 0$$

$$u_n(x,0) = C_1\cos(\zeta_n x)\,K_2\,\mathrm{senh}(\zeta_n y) = A_n\cos(\zeta_n x)\,\mathrm{senh}(\zeta_n y)$$

CASO 2: $\lambda_n = 0$

$$X''(x) = 0 \;\Rightarrow\; X(x) = C_1 x + C_2 \quad \text{y} \quad Y''(y) = 0 \;\Rightarrow\; Y(y) = K_1 y + K_2$$

$$X'(0) = X'(\pi) = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = 0 \;\Rightarrow\; X(x) = C_2 \;\Rightarrow\; u_0(x,y) = X(x)Y(y) = C_2(K_1 y + K_2)$$

$$u(x,0) = 0 \quad\Rightarrow\quad 0 = C_2(K_1\cdot 0 + K_2) \quad\Rightarrow\quad K_2 = 0 \quad\Rightarrow\quad u_0(x,y) = C_2K_1 y = ky$$

CASO 3: $\lambda_n < 0$. Sea $\lambda_n = -\zeta_n^2$ con $\zeta_n > 0$

$$X''(x) - \zeta_n^2 X(x) = 0 \quad\Rightarrow\quad X(x) = C_1\cosh(\zeta_n x) + C_2\,\mathrm{senh}(\zeta_n x)$$

$$X'(x) = \zeta_n C_1\,\mathrm{senh}(\zeta_n x) + \zeta_n C_2\cosh(\zeta_n x)$$

$$X'(0) = 0 \;\Rightarrow\; 0 = \zeta_n C_1\,\mathrm{senh}(\zeta_n\cdot 0) + \zeta_n C_2\cosh(\zeta_n\cdot 0) \quad\Rightarrow\quad \zeta_n C_2 = 0 \quad\Rightarrow\quad C_2 = 0$$

$$X'(\pi) = 0 \quad\Rightarrow\quad 0 = \zeta_n C_1\,\mathrm{senh}(\zeta_n\cdot\pi) + \zeta_n\cdot 0\cdot\cosh(\zeta_n\cdot\pi) \quad\Rightarrow\quad \zeta_n C_1\,\mathrm{senh}(\pi\zeta_n) = 0$$

Como $\zeta_n \neq 0$ entonces $\zeta_n\,\mathrm{senh}(\pi\zeta_n)$ no se anula y $C_1 = 0$ obteniéndose la solución trivial.

Este caso se obtiene $u(x,y) = 0$

Se plantea una "Superposición" en serie de Fourier sumando todas las soluciones:

$$u(x,y) = ky + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(\zeta_n x)\,\mathrm{senh}(\zeta_n y)$$

Aplicando la condición de borde $u(x,\pi) = x$:

$$u(x,\pi) = x = k\cdot 0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(\zeta_n x)\,\mathrm{senh}(\zeta_n y)$$

Los coeficientes A_n son obtenidos a partir de la ortogonalidad de las funciones $\cos(\zeta_n x)$ en el intervalo $0 \le x \le \pi$.

$$A_n = \frac{\langle u(x,\pi), \cos(\zeta_n x)\rangle}{\langle \cos(\zeta_n x), \cos(\zeta_n x)\rangle} = \frac{\langle x, \cos(nx)\rangle}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x\,\mathrm{sen}(nx)}{n}\Bigg|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{sen}(nx)}{n}\,dx$$

$$= 0 + \frac{2}{\pi n^2}\cos(nx)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}(\cos(n\pi) - 1) = -\frac{4}{\pi n^2}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Calculando el valor del término independiente k

$$k = \frac{A_0}{2} = \frac{\langle u(x,\pi), \cos(0\cdot x)\rangle}{\langle \cos(0\cdot x), \cos(0\cdot x)\rangle} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} u(x,\pi)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Sustituyendo los coeficientes se obtiene la solución en $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$

$$u(x,y) = \frac{\pi}{2}y - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi n^2}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos(nx)\,\mathrm{senh}(ny)$$

PROBLEMA 9

Sea $0 < \beta < 1$. Encuentre la función $u(x,t)$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} \quad \text{si} \quad 0 < x < 1 \ , \ t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < x < \beta \\ 0 & \text{si} \quad \beta \le x < 1 \end{cases} \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Aplicando separación de variables. Sea $u(x,t) = X(x)T(t)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t) \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \Rightarrow \ X''(x)T(t) = X(x)T'(t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda_n$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = X'(0)T(t) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = X'(1)T(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad X'(0) = X'(1) = 0 \quad \text{ya que} \quad T(t) \neq 0$$

Se reescribe el problema de autofunciones como

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda_n X(x) = 0 \\ T'(t) + \lambda_n T(t) = 0 \\ X'(0) = X'(1) = 0 \end{cases}$$

CASO 1: $\lambda_n > 0$. Sea $\lambda_n = \zeta_n^2$ con $\zeta_n > 0$

$$X''(x) + \zeta_n^2 X(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = C_1 \cos(\zeta_n x) + C_2 \operatorname{sen}(\zeta_n x)$$

$$X'(x) = -\zeta_n C_1 \operatorname{sen}(\zeta_n x) + \zeta_n C_2 \cos(\zeta_n x)$$

$$X'(0) = 0 \ \Rightarrow \ 0 = -\zeta_n C_1 \operatorname{sen}(\zeta_n \cdot 0) + \zeta_n C_2 \cos(\zeta_n \cdot 0) \quad \Rightarrow \quad \zeta_n C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$X'(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = -\zeta_n C_1 \operatorname{sen}(\zeta_n \cdot 1) + \zeta_n C_2 \cos(\zeta_n \cdot 1) \quad \Rightarrow \quad \zeta_n C_1 \operatorname{sen} \zeta_n = 0$$

Pero $C_1 \neq 0$ ya que se buscan soluciones no triviales.

Como $C_1 \neq 0$ y $\zeta_n \neq 0$ $\Rightarrow$ $\operatorname{sen} \zeta_n = 0$ $\Rightarrow$ $\zeta_n = n\pi$ para $n = 1,2,3 \ldots$

$$T'(t) + \zeta_n^2 T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad T(t) = C_3 e^{-\zeta_n^2 t}$$

En este caso la familia de autofunciones viene dada por

$$u_n(x,t) = X(x)T(t) = C_1 \cos(\zeta_n x)\, C_3 e^{-\zeta_n^2 t} = A_n e^{-\zeta_n^2 t} \cos(\zeta_n x)$$

CASO 2: $\lambda_n = 0$

$$X''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = C_1 x + C_2 \qquad \text{y} \qquad T'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad T(t) = C_3$$

$$X'(0) = X'(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = C_2$$

$$u_0(x,t) = X(x)T(t) = C_2 C_3 = k$$

CASO 3: $\lambda_n < 0$. Sea $\lambda_n = -\zeta_n^2$ con $\zeta_n > 0$

$$X''(x) - \zeta_n^2 X(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad X(x) = C_1 \cosh(\zeta_n x) + C_2 \operatorname{senh}(\zeta_n x)$$

$$X'(x) = \zeta_n C_1 \operatorname{senh}(\zeta_n x) + \zeta_n C_2 \cosh(\zeta_n x)$$

$$X'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \zeta_n C_1 \operatorname{senh}(\zeta_n \cdot 0) + \zeta_n C_2 \cosh(\zeta_n \cdot 0) \quad \Rightarrow \quad \zeta_n C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$X'(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \zeta_n C_1 \operatorname{senh}(\zeta_n \cdot 1) + \zeta_n \cdot 0 \cdot \cosh(\zeta_n \cdot 1) \quad \Rightarrow \quad \zeta_n C_1 \operatorname{senh} \zeta_n = 0$$

Como $\zeta_n \neq 0$ entonces $\zeta_n \operatorname{senh} \zeta_n$ no se anula y $C_1 = 0$ obteniéndose la solución trivial.

Este caso se obtiene $u(x,t) = 0$

Se plantea una "Superposición" en serie de Fourier sumando todas las soluciones:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\zeta_n^2 t} \cos(\zeta_n x)$$

Aplicando la condición de borde $u(x,0)$:

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < x < \beta \\ 0 & \text{si} \quad \beta \le x < 1 \end{cases} = k + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\zeta_n x)$$

Los coeficientes A_n son obtenidos a partir de la ortogonalidad de las funciones $\cos(\zeta_n x)$ en el intervalo $0 < x < 1$.

$$A_n = \frac{\langle u(x,0), \cos(\zeta_n x)\rangle}{\langle \cos(\zeta_n x), \cos(\zeta_n x)\rangle} = \frac{\langle u(x,0), \cos(n\pi x)\rangle}{1/2} = 2\int_0^\beta 1 \cdot \cos(n\pi x)\, dx + 2\int_\beta^1 0 \cdot \cos(n\pi x)\, dx =$$

$$= 2 \cdot \left. \frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{n\pi} \right|_0^\beta = \frac{2}{n\pi}(\operatorname{sen}(n\pi\beta) - 0) = \frac{2\operatorname{sen}(n\pi\beta)}{n\pi}$$

Calculando el valor del término independiente k

$$k = \frac{A_0}{2} = \frac{\langle u(0,y), \cos(0 \cdot y)\rangle}{\langle \cos(0 \cdot y), \cos(0 \cdot y)\rangle} = \frac{1}{1}\int_0^1 u(x,0)dx = \int_0^\beta u(x,0)dx + \int_\beta^1 u(x,0)dx = \beta$$

Sustituyendo los coeficientes se obtiene la solución en $0 < x < 1$, $t > 0$

$$u(x,t) = \beta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\operatorname{sen}(n\pi\beta)}{n\pi} e^{-(n\pi)^2 t} \cos(n\pi x)$$

PROBLEMA 10

Encuentre la función $u(x,t)$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \text{si} \quad 0 < x < \pi \ , \ \ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = 2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(3x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x(\pi - x) \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Aplicando separación de variables. Sea $u(x,t) = X(x)T(t)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t) \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)T''(t) \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \ X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda_n$$

$$\begin{cases} u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \\ u(\pi,t) = X(\pi)T(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \qquad X(0) = X(\pi) = 0 \quad \text{ya que} \quad T(t) \neq 0$$

Se reescribe el problema de autofunciones como

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda_n X(x) = 0 \\ T''(t) + \lambda_n T(t) = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

CASO 1: $\lambda_n > 0$. Sea $\lambda_n = \omega_n^2$ con $\omega_n > 0$

$$X''(x) + \omega_n^2 X(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad X(x) = C_1 \cos(\omega_n x) + C_2 \operatorname{sen}(\omega_n x)$$

$$X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = C_1 \cos(\omega_n \cdot 0) + C_2 \operatorname{sen}(\omega_n \cdot 0) \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

$$X(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 \cdot \cos(\omega_n \cdot \pi) + C_2 \operatorname{sen}(\omega_n \cdot \pi) \quad \Rightarrow \quad C_2 \operatorname{sen}(\pi\omega_n) = 0$$

Pero $C_2 \neq 0$ ya que se buscan soluciones no triviales.

Como $C_2 \neq 0 \ \Rightarrow \ \operatorname{sen}(\pi\omega_n) = 0 \ \Rightarrow \ \pi\omega_n = n\pi \ \Rightarrow \ \omega_n = n$ para $n = 1,2,3 \ldots$

$$T''(t) + \lambda_n T(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T(t) = K_1 \cos(\omega_n t) + K_2 \operatorname{sen}(\omega_n t)$$

En este caso la familia de autofunciones viene dada por

$$u_n(x,t) = X(x)T(t) = C_2 \operatorname{sen}(\omega_n x)\left(K_1 \cos(\omega_n t) + K_2 \operatorname{sen}(\omega_n t)\right)$$

$$u_n(x,t) = A_n \operatorname{sen}(\omega_n x)\cos(\omega_n t) + B_n \operatorname{sen}(\omega_n x)\operatorname{sen}(\omega_n t)$$

CASO 2: $\lambda_n = 0$

$$X''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = C_1 x + C_2$$

$$X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$X(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = C_1 \cdot \pi + 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

Como $C_1 = C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ solución trivial $\; u(x,t) = 0$

CASO 3: $\lambda_n < 0$. Sea $\lambda_n = -\omega_n^2$ con $\omega_n > 0$

$$X''(x) - \omega_n^2 X(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = C_1 \cosh(\omega_n x) + C_2 \operatorname{senh}(\omega_n x)$$

$$X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = C_1 \cosh(\omega_n \cdot 0) + C_2 \operatorname{senh}(\omega_n \cdot 0) \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

$$X(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 \cdot \cosh(\omega_n \cdot \pi) + C_2 \operatorname{senh}(\omega_n \cdot \pi) \quad \Rightarrow \quad C_2 \operatorname{senh}(\pi\omega_n) = 0$$

Como $\omega_n \neq 0$ entonces $\operatorname{senh}(\pi\omega_n)$ no se anula y $C_2 = 0$ obteniéndose la solución trivial

Este caso se obtiene $u(x,t) = 0$

La familia de autofunciones en $0 < x < \pi$, $t > 0$ son

$u_n(x,t) = A_n \operatorname{sen}(\omega_n x)\cos(\omega_n t) + B_n \operatorname{sen}(\omega_n x)\operatorname{sen}(\omega_n t)$ donde $\omega_n = n$ para $n = 1,2,3 \ldots$

Se plantea una "Superposición" en serie de Fourier sumando todas las soluciones del problema:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{sen}(\omega_n x)\cos(\omega_n t) + B_n \operatorname{sen}(\omega_n x)\operatorname{sen}(\omega_n t))$$

Aplicando la primera condición inicial $u(x,0) = 2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(3x)$:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{sen}(\omega_n x)\cos(\omega_n \cdot 0) + B_n \operatorname{sen}(\omega_n x)\operatorname{sen}(\omega_n \cdot 0))$$

$$u(x,0) = 2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(3x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(\omega_n x)$$

Los coeficientes A_n son obtenidos a partir de la ortogonalidad de las funciones $\operatorname{sen}(\omega_n x)$ en el intervalo $0 < x < \pi$. Además, la condición de $u(x,0)$ es una combinación lineal de funciones seno por lo que se tiene que

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } n = m \end{cases}$$

$$A_n = \frac{\langle u(x,0), \operatorname{sen}(\omega_n x)\rangle}{\langle \operatorname{sen}(\omega_n x), \operatorname{sen}(\omega_n x)\rangle} = \frac{\langle 2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(3x), \operatorname{sen}(nx)\rangle}{\pi/2} = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 1 \\ -1 & \text{si } n = 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Derivando la solución respecto a t y aplicando la segunda condición inicial

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-\omega_n A_n \operatorname{sen}(\omega_n x)\operatorname{sen}(\omega_n t) + \omega_n B_n \operatorname{sen}(\omega_n x)\cos(\omega_n t))$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}(-\omega_n A_n \operatorname{sen}(\omega_n x)\operatorname{sen}(\omega_n \cdot 0) + \omega_n B_n \operatorname{sen}(\omega_n x)\cos(\omega_n \cdot 0))$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x(\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty}\omega_n B_n \operatorname{sen}(\omega_n x)$$

Los coeficientes $\omega_n B_n$ son obtenidos a partir de la ortogonalidad de las funciones $\operatorname{sen}(\omega_n x)$ en el intervalo $0 < x < \pi$.

$$\omega_n B_n = \frac{\langle \frac{\partial u}{\partial t}(x,0), \operatorname{sen}(\omega_n x)\rangle}{\langle \operatorname{sen}(\omega_n x), \operatorname{sen}(\omega_n x)\rangle} = \frac{\langle x(\pi - x), \operatorname{sen}(nx)\rangle}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\langle x(\pi - x), -\frac{1}{n^2}\frac{d^2}{dx^2}(\operatorname{sen}(nx))\rangle$$

$$= -\frac{2}{\pi n^2}\langle \frac{d^2}{dx^2}(\pi x - x^2), \operatorname{sen}(nx)\rangle = -\frac{2}{\pi n^2}\langle -2, \operatorname{sen}(nx)\rangle = \frac{4}{\pi n^2}\langle 1, \operatorname{sen}(nx)\rangle =$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi} 1 \cdot \operatorname{sen}(nx)\, dx = -\frac{4}{\pi n^2}\cdot \frac{\cos(nx)}{n}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi n^3}(1 - \cos(n\pi)) = \frac{8}{\pi n^3}\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\omega_n B_n = \frac{8}{\pi n^3}\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad B_n = \frac{8}{\pi n^4}\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Sustituyendo los coeficientes A_n y B_n en la solución

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(nx)\cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi n^4}\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(nt)$$

$$u(x,t) = 2\operatorname{sen} x \cos t - \operatorname{sen}(3x)\cos(3t) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi n^4}\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(nt)$$

PROBLEMA 11

Encuentre la función $u(x,y)$ acotada en $x>0$, $0<y<\pi$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad \text{si} \quad x>0 \ , \ 0<y<\pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0)=\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,\pi)=0 \\ u(0,y)=y \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Aplicando separación de variables. Sea $u(x,y)=X(x)Y(y)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=X''(x)Y(y) \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=X(x)Y''(y) \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad \Rightarrow \quad X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=\lambda_n$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0)=X(x)Y'(0)=0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,\pi)=X(x)Y'(\pi)=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Y'(0)=Y'(\pi)=0 \quad \text{ya que} \quad X(x)\neq 0$$

Se reescribe el problema de autofunciones como:

$$\begin{cases} X''(x)-\lambda_n X(x)=0 \\ Y''(y)+\lambda_n Y(y)=0 \\ Y'(0)=Y'(\pi)=0 \end{cases}$$

CASO 1: $\lambda_n>0$. Sea $\lambda_n=\zeta_n^2$ con $\zeta_n>0$

$$Y''(y)+\zeta_n^2 Y(y)=0 \quad \Rightarrow \quad Y(y)=C_1\cos(\zeta_n y)+C_2\operatorname{sen}(\zeta_n y)$$

$$Y'(y)=-\zeta_n C_1\operatorname{sen}(\zeta_n y)+\zeta_n C_2\cos(\zeta_n y)$$

$$Y'(0)=0 \ \Rightarrow \ 0=-\zeta_n C_1\operatorname{sen}(\zeta_n\cdot 0)+\zeta_n C_2\cos(\zeta_n\cdot 0) \ \Rightarrow \ \zeta_n C_2=0 \ \Rightarrow \ C_2=0$$

$$Y'(\pi)=0 \ \Rightarrow \ 0=-\zeta_n C_1\operatorname{sen}(\zeta_n\cdot\pi)+\zeta_n C_2\cos(\zeta_n\cdot\pi) \ \Rightarrow \ \zeta_n C_1\operatorname{sen}(\pi\zeta_n)=0$$

Pero $C_1\neq 0$ ya que se buscan soluciones no triviales.

Como $C_1\neq 0$ y $\zeta_n\neq 0$ $\Rightarrow$ $\operatorname{sen}(\pi\zeta_n)=0$ $\Rightarrow$ $\pi\zeta_n=n\pi$ $\Rightarrow$ $\zeta_n=n$ para $n=1,2,3\ldots$

$$X''(x)-\zeta_n^2 X(x)=0 \quad \Rightarrow \quad X(x)=K_1e^{\zeta_n x}+K_2e^{-\zeta_n x}$$

$e^{\zeta_n x}$ es una función no acotada en el intervalo $x>0$ y $e^{-\zeta_n x}$ es una función acotada en el intervalo $x>0$ y para que $u_n(x,y)$ sea una función acotada, la constante K_1 tiene que ser cero. En este caso la familia de autofunciones viene dada por:

$$u_n(x,y)=K_2e^{-\zeta_n x}C_1\cos(\zeta_n y)=A_ne^{-\zeta_n x}\cos(\zeta_n y)$$

CASO 2: $\lambda_n = 0$

$$Y''(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(y) = C_1 y + C_2 \qquad \text{y} \qquad X''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = K_1 x + K_2$$

$$Y'(0) = Y'(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(y) = C_2$$

x es una función no acotada en el intervalo $0 < x < \infty$ por lo que la constante $K_1 = 0$

$$u_0(x, y) = X(x)Y(y) = K_2 C_2 = k$$

CASO 3: $\lambda_n < 0$. Sea $\lambda_n = -\zeta_n^2$ con $\zeta_n > 0$

$$Y''(y) - \zeta_n^2 Y(y) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad Y(y) = C_1 \cosh(\zeta_n y) + C_2 \operatorname{senh}(\zeta_n y)$$

$$Y'(y) = \zeta_n C_1 \operatorname{senh}(\zeta_n y) + \zeta_n C_2 \cosh(\zeta_n y)$$

$$Y'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \zeta_n C_1 \operatorname{senh}(\zeta_n \cdot 0) + \zeta_n C_2 \cosh(\zeta_n \cdot 0) \quad \Rightarrow \quad \zeta_n C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$Y'(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \zeta_n C_1 \operatorname{senh}(\zeta_n \cdot \pi) + \zeta_n \cdot 0 \cdot \cosh(\zeta_n \cdot \pi) \quad \Rightarrow \quad \zeta_n C_1 \operatorname{senh}(\pi \zeta_n) = 0$$

Como $\zeta_n \neq 0$ entonces $\zeta_n \operatorname{senh}(\pi \zeta_n)$ no se anula y $C_2 = 0$ obteniéndose la solución trivial.

Este caso se obtiene $u(x, y) = 0$

Se plantea una "Superposición" en serie de Fourier sumando todas las soluciones:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\zeta_n x} \cos(\zeta_n y)$$

Aplicando la condición de borde $u(0, y) = y$:

$$u(0, y) = y = k + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\zeta_n y)$$

Los coeficientes A_n son obtenidos a partir de la ortogonalidad de las funciones $\cos(\zeta_n y)$ en el intervalo $0 < y < \pi$.

$$A_n = \frac{\langle u(0, y), \cos(\zeta_n y) \rangle}{\langle \cos(\zeta_n y), \cos(\zeta_n y) \rangle} = \frac{\langle y, \cos(ny) \rangle}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y \cos(ny)\, dy = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{y \operatorname{sen}(ny)}{n} \bigg|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(ny)}{n} dy$$
$$= 0 + \frac{2}{\pi n^2} \cos(ny) \bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2} (\cos(n\pi) - 1) = -\frac{4}{\pi n^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{n\pi}{2} \right)$$

Calculando el valor del término independiente k

$$k = \frac{A_0}{2} = \frac{\langle u(0, y), \cos(0 \cdot y) \rangle}{\langle \cos(0 \cdot y), \cos(0 \cdot y) \rangle} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u(0, y) dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} y dy = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Sustituyendo los coeficientes se obtiene la solución en $x > 0$, $0 < y < \pi$

$$u(x, y) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{n\pi}{2} \right) e^{-nx} \cos(ny)$$

PROBLEMA 12

Sea $a > 0$. Calcule la transformada de Fourier de la función definida por

$$f(t) = e^{-t^2/2}\,\mathrm{sen}(at)$$

Y exprésela en términos de funciones hiperbólicas.

SOLUCIÓN:

$$\mathrm{sen}(at) = \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}$$

$$f(t) = e^{-t^2/2}\,\mathrm{sen}(at) = e^{-t^2/2}\,\frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i} = \frac{1}{2i}e^{-t^2/2}e^{iat} - \frac{1}{2i}e^{-t^2/2}e^{-iat}$$

Sea $\hat{f}(\omega)$ la transformada de Fourier de la función $f(t)$ definida por

$$\hat{f}(\omega) \equiv \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}dt$$

Luego, usando los teoremas operacionales:

$$\mathcal{F}\left[e^{-t^2/2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\omega^2/2}$$

$$\mathcal{F}\left[e^{-t^2/2}e^{iat}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(\omega-a)^2/2}$$

$$\mathcal{F}\left[e^{-t^2/2}e^{-iat}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(\omega+a)^2/2}$$

Sustituyendo las expresiones:

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{2i}\mathcal{F}\left[e^{-\frac{t^2}{2}}e^{iat}\right] - \frac{1}{2i}\mathcal{F}\left[e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-iat}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(\omega-a)^2}{2}} - \frac{1}{2i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(\omega+a)^2}{2}} = \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{\omega^2+a^2-2a\omega}{2}} - e^{-\frac{\omega^2+a^2+2a\omega}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{\omega^2+a^2}{2}}e^{a\omega} - e^{-\frac{\omega^2+a^2}{2}}e^{-a\omega}\right) = \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\omega^2+a^2}{2}}\left(e^{a\omega} - e^{-a\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\omega^2+a^2}{2}}\cdot\frac{e^{a\omega} - e^{-a\omega}}{2} = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\omega^2+a^2}{2}}\,\mathrm{senh}(a\omega) = -i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\omega^2+a^2}{2}}\,\mathrm{senh}(a\omega)$$

PROBLEMA 13

Sean $a > 0, b > 0$. Usando transformadas de Fourier demuestre la siguiente fórmula de integración

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bx}\operatorname{sen}(ax)}{x}dx = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$$

SOLUCIÓN:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bx}\operatorname{sen}(ax)}{x}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-b|x|}\operatorname{sen}(ax)}{x}dx$$

$$\frac{e^{-b|x|}\operatorname{sen}(ax)}{x} = \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(ax)}{x}}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^{-b|x|}}_{g(x)} = f(x)g(x)$$

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(ax)}{x} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$$

$$g(x) = e^{-b|x|} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$$

Como $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, se puede aplicar el teorema de Parseval donde

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\overline{g(x)}dx = 2\pi\int_{-\infty}^\infty \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}\,d\omega$$

Hallando cada transformada de Fourier

$$\mathcal{F}[f(x)] = \mathcal{F}\left[\frac{\operatorname{sen}(ax)}{x}\right] \quad \Rightarrow \quad \hat{f}(\omega) = \frac{1}{2}\,1_{(-a,a)}(\omega)$$

$$\mathcal{F}[g(x)] = \mathcal{F}\left[e^{-b|x|}\right] = \mathcal{F}\left[\overline{g(x)}\right] \quad \Rightarrow \quad \hat{g}(\omega) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{b}{\omega^2+b^2} = \overline{\hat{g}(\omega)}$$

Como las funciones f, g y sus transformadas son funciones reales, entonces sus conjugadas son las mismas funciones. Sustituyendo las expresiones y simplificando:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen}(ax)}{x}\overline{e^{-b|x|}}dx = 2\pi\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{2}\,1_{(-a,a)}(\omega)\frac{1}{\pi}\cdot\frac{b}{\omega^2+b^2}d\omega$$

$$= b\int_{-\infty}^\infty 1_{(-a,a)}(\omega)\frac{1}{\omega^2+b^2}d\omega = b\int_{-a}^a \frac{1}{\omega^2+b^2}d\omega = 2b\int_0^a \frac{1}{\omega^2+b^2}d\omega$$

$$= 2b\cdot\frac{1}{b}\arctan\left(\frac{\omega}{b}\right)\Bigg|_0^a = 2\arctan\left(\frac{a}{b}\right)$$

Como el integrando es una función par, entonces

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bx}\operatorname{sen}(ax)}{x}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-b|x|}\operatorname{sen}(ax)}{x}dx = \frac{1}{2}\cdot 2\arctan\left(\frac{a}{b}\right) = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$$

PROBLEMA 14

Calcule la siguiente integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x^3 + 2x^2 + 2x} dx$$

SOLUCIÓN:

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x^3 + 2x^2 + 2x} = \underbrace{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x}}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2 + 2x + 2}}_{g(x)} = f(x)g(x)$$

Completando cuadrados en la función $g(x)$:

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} = \frac{1}{(x^2 + 2x + 1) + (2 - 1)} = \frac{1}{(x + 1)^2 + 1}$$

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$$

$$g(x) = \frac{1}{(x + 1)^2 + 1} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$$

Como $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, se puede aplicar el teorema de Parseval donde

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{g(x)} dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}\, d\omega$$

$$\mathcal{F}[f(x)] = \mathcal{F}\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x}\right] \quad \Rightarrow \quad \hat{f}(\omega) = \frac{1}{2}\ 1_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}(\omega)$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1 + x^2}\right] = \frac{1}{2}\ e^{-|\omega|}$$

Utilizando el teorema de traslación en el tiempo

$$\mathcal{F}[g(x)] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{(x + 1)^2 + 1}\right] \quad \Rightarrow \quad \hat{g}(\omega) = \frac{1}{2}\ e^{-|\omega|} \cdot e^{+1 \cdot i\omega}$$

Resolviendo el conjugado de $\hat{g}(\omega)$ (en este caso no se puede descuidar)

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{2}\ e^{-|\omega|}e^{i\omega} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{\hat{g}(\omega)} = \overline{\frac{1}{2}\ e^{-|\omega|}e^{i\omega}} = \frac{1}{2}\ e^{-|\omega|}e^{-i\omega}$$

Sustituyendo expresiones en el teorema de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x} \cdot \overline{\frac{1}{(x + 1)^2 + 1}} dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\ 1_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}(\omega) \cdot \frac{1}{2}\ e^{-|\omega|}e^{-i\omega} d\omega =$$

$$2\pi\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-|\omega|}e^{-i\omega}d\omega = \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-|\omega|}e^{-i\omega}d\omega = \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-|\omega|}(\cos\omega - i\operatorname{sen}\omega)d\omega$$

Descomponiendo la integral anterior en integral-coseno e integral-seno (la integral-seno es cero por ser un integrando impar):

$$= \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-|\omega|}\cos\omega\, d\omega - i\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-|\omega|}\operatorname{sen}\omega\, d\omega = 2\cdot\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-|\omega|}\cos\omega\, d\omega =$$

$$= \pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\omega}\cos\omega\, d\omega = \pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\omega}\frac{e^{i\omega}+e^{-i\omega}}{2}d\omega =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\omega}\left(e^{i\omega}+e^{-i\omega}\right)d\omega = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{(-1+i)\omega}+e^{(-1-i)\omega}\right)d\omega =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{e^{(-1+i)\omega}}{-1+i}+\frac{e^{(-1-i)\omega}}{-1-i}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\cdot e^{-\omega}\left(\frac{e^{i\omega}}{-1+i}+\frac{e^{-i\omega}}{-1-i}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot e^{-\omega}\left(\frac{(-1-i)e^{i\omega}+(-1+i)e^{-i\omega}}{(-1+i)(-1-i)}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot e^{-\omega}\left(\frac{-\left(e^{i\omega}+e^{-i\omega}\right)-i\left(e^{i\omega}-e^{-i\omega}\right)}{(-1)^2-i^2}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\cdot e^{-\omega}\left(\frac{-(2\cos\omega)-i(2i\operatorname{sen}\omega)}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot e^{-\omega}(-\cos\omega+\operatorname{sen}\omega)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\cdot e^{-\frac{\pi}{2}}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)-\frac{\pi}{2}\cdot e^{0}(-\cos(0)+\operatorname{sen}(0))$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot e^{-\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}(-1) = \frac{\pi}{2}\left(1+e^{-\pi/2}\right)$$

Así se concluye que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x^3+2x^2+2x}dx = \frac{\pi}{2}\left(1+e^{-\pi/2}\right)$$

Observación: el integrando NO es una función par.

PROBLEMA 15

Sean $a, b > 0$. Utilizando la transformada de Fourier calcule la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{(x^2+b^2)^2} dx$$

SOLUCIÓN:

Esta integral puede calcularse con el teorema de los residuos de variable compleja, pero también puede calcularse utilizando el teorema de Parseval y la transformada de Fourier.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{(x^2+b^2)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+b^2} \cdot \frac{e^{iax}}{x^2+b^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{x^2+b^2}}_{f(x)} \cdot \underbrace{\overline{\frac{e^{-iax}}{x^2+b^2}}}_{g(x)} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2+b^2} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{e^{-iax}}{x^2+b^2} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$$

Como $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, se puede aplicar el teorema de Parseval donde

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{g(x)} dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}\, d\omega$$

$$\mathcal{F}[f(x)] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+b^2}\right] \quad \Rightarrow \quad \hat{f}(\omega) = \frac{1}{2b} e^{-b|\omega|}$$

$$\mathcal{F}[g(x)] = \mathcal{F}\left[\frac{e^{-iax}}{x^2+b^2}\right] \quad \Rightarrow \quad \hat{g}(\omega) = \frac{1}{2b} e^{-b|\omega|}\Bigg|_{\omega+a} = \frac{1}{2b} e^{-b|\omega+a|}$$

Sustituyendo expresiones en el teorema de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+b^2} \cdot \overline{\frac{e^{-iax}}{x^2+b^2}} dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2b} e^{-b|\omega|} \cdot \overline{\frac{1}{2b} e^{-b|\omega+a|}} d\omega = \frac{\pi}{2b^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b(|\omega|+|\omega+a|)} d\omega$$

$$|\omega| + |\omega+a| = \begin{cases} -\omega - (\omega+a) & \text{si} \quad \omega < -a \\ -\omega + (\omega+a) & \text{si} \quad -a \le \omega < 0 \\ \omega + (\omega+a) & \text{si} \quad \omega \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} -2\omega - a & \text{si} \quad \omega < -a \\ a & \text{si} \quad -a \le \omega < 0 \\ 2\omega + a & \text{si} \quad \omega \ge 0 \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{2b^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b(|\omega|+|\omega+a|)} d\omega = \frac{\pi}{2b^2} \left(\int_{-\infty}^{-a} e^{-b(-2\omega-a)} d\omega + \int_{-a}^{0} e^{-ba} d\omega + \int_{0}^{\infty} e^{-b(2\omega+a)} d\omega \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2b^2} \left(\int_{-\infty}^{-a} e^{2b\omega+ab} d\omega + e^{-ba} \int_{-a}^{0} d\omega + \int_{0}^{\infty} e^{-2b\omega-ab} d\omega \right) =$$

$$\frac{\pi}{2b^2} \left(\frac{e^{2b\omega+ab}}{2b}\Bigg|_{-a} + e^{-ba} \cdot a - \frac{e^{-2b\omega-ab}}{-2b}\Bigg|_{0} \right) = \frac{\pi}{2b^2} \left(\frac{e^{-2ba+ab}}{2b} + a e^{-ba} + \frac{e^{-ab}}{2b} \right) =$$

$$= \frac{\pi e^{-ab}}{2b^2} \left(\frac{1}{2b} + a + \frac{1}{2b} \right) = \frac{\pi e^{-ab}}{2b^3}(1+ab) \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{(x^2+b^2)^2} dx = \frac{\pi e^{-ab}}{2b^3}(1+ab)$$

Tomando partes reales a la expresión anterior:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{(x^2+b^2)^2} dx = \frac{\pi e^{-ab}}{2b^3}(1+ab) \quad \text{para} \quad a, b > 0$$

PROBLEMA 16

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$f(t) = \begin{cases} 2+t & \text{si } -2 \le t < 0 \\ 2-t & \text{si } 0 \le t < 2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

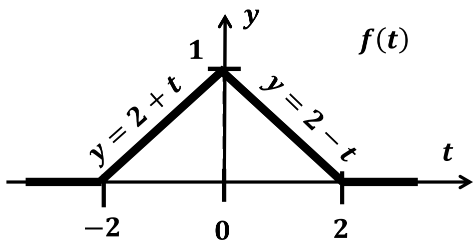
(a) Calcule la transformada de Fourier de f.
(b) Usando la parte (a) calcule las integrales

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)^2 dt \qquad \text{y} \qquad \int_0^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)^4 dt$$

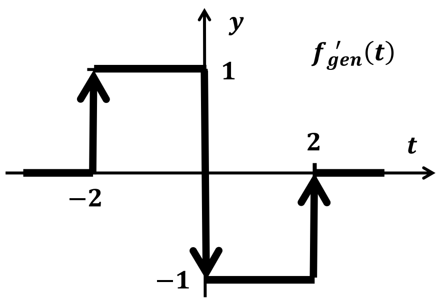
SOLUCIÓN:

(d) Calculando las primeras dos derivadas generalizadas de f :

$$f(t) = \begin{cases} 2+t & \text{si } -2 \le t < 0 \\ 2-t & \text{si } 0 \le t < 2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$



$$f'_{gen}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -2 \le t < 0 \\ -1 & \text{si } 0 \le t < 2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$



$$f''_{gen}(t) = \delta(t+2) - 2\delta(t) + \delta(t-2)$$

Sea $\hat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la transformada de Fourier de $f(t)$ definida por

$$\hat{f}(\omega) \equiv \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt$$

Aplicando los teoremas operacionales de las transformadas de Fourier

$$\mathcal{F}\left[f''_{gen}(t)\right] = (i\omega)^2 \hat{f}(\omega) = -\,\omega^2 \hat{f}(\omega)$$

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \frac{1}{2\pi}$$

$$\mathcal{F}[\delta(t+2)] = \frac{1}{2\pi} e^{2i\omega}$$

$$\mathcal{F}[\delta(t-2)] = \frac{1}{2\pi}e^{-2i\omega}$$

$$\mathcal{F}\left[f''_{gen}(t)\right] = \mathcal{F}[\delta(t+2)] - 2\mathcal{F}[\delta(t)] + \mathcal{F}[\delta(t-2)] \quad \Rightarrow \quad -\omega^2\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}e^{2i\omega} - 2\cdot\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}e^{-2i\omega}$$

Despejando la transformada de Fourier de la expresión anterior

$$-\omega^2\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\pi}\left(-1 + \underbrace{\frac{e^{2i\omega}+e^{-2i\omega}}{2}}_{\cos(2\omega)}\right) \quad \Rightarrow \quad \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1-\cos(2\omega)}{\omega^2} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\operatorname{sen}^2\omega}{\omega^2} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega}\right)^2$$

(e) A partir de la definición de la transformada inversa de Fourier se calcula la primera integral

$$f(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}(\omega)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}d\omega$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega}\right)^2 e^{i\omega t}d\omega \quad \Rightarrow \quad f(0) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega}\right)^2 e^{0}d\omega \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega}\right)^2 d\omega = \frac{\pi}{2}\cdot 2 = \pi$$

Como el integrando es una función par entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega}\right)^2 d\omega = 2\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega}\right)^2 d\omega \quad \Rightarrow \quad \int_{0}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega}\right)^2 d\omega = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega}\right)^2 d\omega = \frac{\pi}{2}$$

Para encontrar el valor de la segunda integral se usa el teorema de Parseval, donde la función $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{f(t)}dt = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\overline{\hat{f}(\omega)}\,d\omega \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{2}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega}\right)^2\right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{2}|2-t|^2\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2-2}|2-(t+2)|^2\,dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{0}t^2\,dt = -\frac{1}{\pi}\int_{2}^{0}(-t)^2\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2}t^2\,dt = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2^3}{3}$$

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega}\right)^4 d\omega = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2^3}{3} \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega}\right)^4 d\omega = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2^3}{3}\cdot\frac{\pi^2}{2^2} = \frac{2\pi}{3}$$

Como el integrando es una función par entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega}\right)^4 d\omega = 2\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega}\right)^4 d\omega \quad \Rightarrow \quad \int_{0}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega}\right)^4 d\omega = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega}\right)^4 d\omega = \frac{\pi}{3}$$

PROBLEMA 17

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si} \quad |x| \le \pi/2 \\ 0 & \text{si} \quad |x| > \pi/2 \end{cases}$$

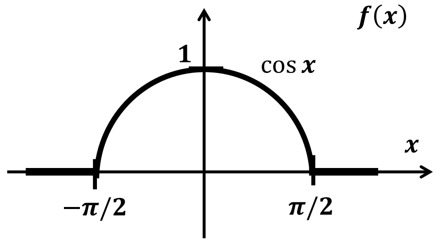
(a) Calcule la transformada de Fourier de f y muestre que esta función es analítica.

(b) Usando la parte (a) calcule las integrales

$$\int_0^\infty \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-x^2}\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_0^\infty \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{(1-x^2)^2}\,dx$$

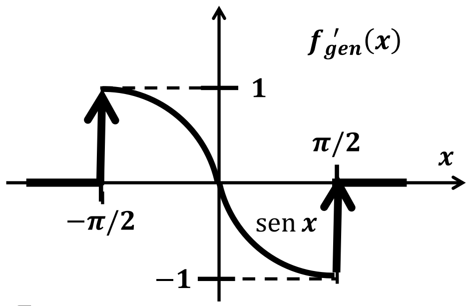
SOLUCIÓN:

Definiendo la función



$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si} \quad |x| \le \pi/2 \\ 0 & \text{si} \quad |x| > \pi/2 \end{cases}$$

Calculando la primera derivada generalizada



$$f'_{gen}(x) = f'(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x & \text{si} \quad |x| \le \pi/2 \\ 0 & \text{si} \quad |x| > \pi/2 \end{cases}$$

Calculando la segunda derivada generalizada:

$$f''_{gen}(x) = \delta\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + f''(x) =$$

$$= \delta(x+\pi/2) + \delta(x-\pi/2) + \begin{cases} -\cos x & \text{si} \quad |x| \le \pi/2 \\ 0 & \text{si} \quad |x| > \pi/2 \end{cases} = \delta(x+\pi/2) + \delta(x-\pi/2) - f(x)$$

Por lo tanto $f(x)$ satisface la siguiente ecuación diferencial en derivadas generalizadas

$$f''_{gen}(x) + f(x) = \delta(x+\pi/2) + \delta(x-\pi/2)$$

Sea $\hat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la transformada de Fourier de $f(x)$ definida por

$$\hat{f}(\omega) \equiv \mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\,dx$$

Aplicando los teoremas operacionales de las transformadas de Fourier

$$\mathcal{F}\left[f''_{gen}(x)\right] = (i\omega)^2 \hat{f}(\omega) = -\,\omega^2 \hat{f}(\omega)$$

$$\mathcal{F}[\delta(x+\pi/2)] \;=\; \frac{1}{2\pi}e^{\frac{\pi}{2}i\omega}$$

$$\mathcal{F}[\delta(x-\pi/2)] \;=\; \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\pi}{2}i\omega}$$

Se sustituyen las expresiones y se despeja la transformada de Fourier

$$\mathcal{F}\left[f''_{gen}(x)\right]+\mathcal{F}[f(x)]=\mathcal{F}[\delta(x+\pi/2)]+\mathcal{F}[\delta(x-\pi/2)] \quad\Rightarrow\quad -\omega^2\hat{f}(\omega)+\hat{f}(\omega)=\frac{1}{2\pi}e^{\frac{\pi}{2}i\omega}+\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\pi}{2}i\omega}$$

$$(1-\ \omega^2)\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{e^{\frac{\pi}{2}i\omega}+e^{-\frac{\pi}{2}i\omega}}{2}\Rightarrow(1-\ \omega^2)\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)\Rightarrow\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)}{1-\ \omega^2}$$

$\hat{f}(\omega)$ es una función analítica en todo su dominio:

$$\lim_{\omega\to\pm1}\hat{f}(\omega)=\lim_{\omega\to\pm1}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)}{1-\ \omega^2}=\frac{1}{\pi}\lim_{\omega\to\pm1}\frac{\frac{d}{d\omega}\cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)}{\frac{d}{d\omega}(1-\ \omega^2)}=\frac{1}{\pi}\lim_{\omega\to\pm1}\frac{-\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)}{-2\omega}=\frac{1}{4}<\infty$$

a partir de la definición de transformada inversa de Fourier

$$f(x)=\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}(\omega)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\,e^{i\omega x}d\omega$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)}{1-\ \omega^2}e^{i\omega x}d\omega$$

$$f(0)=\cos(0)=1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)}{1-\ \omega^2}e^{i\omega\cdot0}d\omega\Rightarrow\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)}{1-\ \omega^2}d\omega=1$$

$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)}{1-\ \omega^2}d\omega=\pi\Rightarrow 2\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)}{1-\ \omega^2}d\omega=\pi\Rightarrow\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)}{1-\ \omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2}$$

Para encontrar el valor de la segunda integral se usa el teorema de Parseval, donde la función $f\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(\omega)\right|^2d\omega\qquad\Rightarrow\qquad\int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(\omega)\right|^2d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)}{1-\ \omega^2}\right|^2d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}|\cos x|^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\cdot2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)}{1-\ \omega^2}\right|^2d\omega=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{2}{\pi^2}\int_{0}^{\infty}\left|\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)}{1-\ \omega^2}\right|^2d\omega=\frac{1}{4}\Rightarrow\int_{0}^{\infty}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)}{(1-\omega^2)^2}d\omega=\frac{\pi^2}{8}$$

PROBLEMA 18

Encuentre explícitamente la función $u(x,t)$ que satisface el problema de conducción de calor

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} \quad \text{si} \quad -\infty < x < \infty \quad , \quad t > 0 \\ \\ u(x,0) = \delta(x) \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Se aplica transformada de Fourier respecto a la variable que tiene como dominio todos los números reales. Aplicando la transformada de Fourier respecto a la variable x definida por

$$\hat{u}(\omega,t) \equiv \mathcal{F}[u(x,t)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega x}dx$$

Usando los teoremas operacionales:

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right] = (i\omega)^2\hat{u}(\omega,t) = -\omega^2\hat{u}(\omega,t)$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right] = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega,t)$$

$$\mathcal{F}[u(x,0)] = \mathcal{F}[\delta(x)] \quad \Rightarrow \quad \hat{u}(\omega,0) = \frac{1}{2\pi}$$

El problema se reescribe en términos de transformadas de Fourier

$$\begin{cases} -\omega^2\hat{u}(\omega,t) = \dfrac{\partial \hat{u}(\omega,t)}{\partial t} \quad \text{si} \quad -\infty < \omega < \infty \ , \ t > 0 \\ \\ \hat{u}(\omega,0) = \dfrac{1}{2\pi} \quad \text{si} \quad -\infty < \omega < \infty \end{cases}$$

Y luego se resuelve la ecuación diferencial:

$$-\omega^2\hat{u}(\omega,t) = \frac{\partial \hat{u}(\omega,t)}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \hat{u}(\omega,t)}{\partial t} + \omega^2\hat{u}(\omega,t) = 0$$

Cuya solución general es

$$\hat{u}(\omega,t) = C(\omega)e^{-\omega^2 t}$$

Se encuentra la constante $C(\omega)$ con la condición inicial:

$$\hat{u}(\omega,0) = C(\omega)e^{-\omega^2\cdot 0} = C(\omega) = \frac{1}{2\pi}$$

Sustituyendo la constante se obtiene la solución acotada $|\hat{u}(\omega,t)| < \infty$ cuya transformada inversa de Fourier existe por que $\hat{u}(\omega,t) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

$$\hat{u}(\omega,t)=\frac{1}{2\pi}e^{-\omega^2 t} \qquad \text{si} \qquad -\infty<\omega<\infty \;,\; t>0$$

Luego se recupera la función $u(x,t)$ mediante la transformada inversa de Fourier:

$$u(x,t)\equiv\mathcal{F}^{-1}[\hat{u}(\omega,t)]=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{u}(\omega,t)e^{i\omega x}d\omega$$

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{u}(\omega,t)e^{i\omega x}d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\omega^2 t}e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\omega^2 t}e^{-i\omega(-x)}d\omega$$

$$=\mathcal{F}\left[e^{-\omega^2 t}\right]\Big|_{-x}=\mathcal{F}\left[e^{-(2t)\frac{\omega^2}{2}}\right]\Big|_{-x}=\frac{1}{\sqrt{2\pi(2t)}}e^{\frac{-x^2}{2(2t)}}\Big|_{-x}=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{\frac{-(-x)^2}{4t}}=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{\frac{-x^2}{4t}}$$

La solución explícita al problema de valores iniciales es

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{\frac{-x^2}{4t}} \qquad \text{si} \quad x\in\mathbb{R} \quad \text{y} \quad t>0$$

PROBLEMA 19

Encuentre la función acotada $u(x,t)$ tal que satisfaga el siguiente problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} \quad \text{si} \quad x > 0 \quad , \quad t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \qquad \text{si} \quad t > 0 \\ u(x,0) = e^{-x^2/2} \quad \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Hay que extender la variable x a $-\infty < x < \infty$. Para esto, se elimina la condición de borde nula $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$ y se extiende la función $u(x,0) = e^{-x^2/2}$ como una función par:

$$f(x) = \begin{cases} u(-x,0) \quad \text{si} \quad x < 0 \\ u(x,0) \quad \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-(-x)^2/2} \quad \text{si} \quad x < 0 \\ e^{-x^2/2} \quad \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} = e^{-x^2/2}$$

Con la variable x extendida a todos los números reales, se replantea el problema como:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} \quad \text{si} \quad -\infty < x < \infty \quad , \quad t > 0 \\ u(x,0) = e^{-x^2/2} \quad \text{si} \quad -\infty < x < \infty \end{cases}$$

Ahora se puede aplicar la transformada de Fourier respecto a la variable x definida por

$$\hat{u}(\omega,t) \equiv \mathcal{F}[u(x,t)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega x}dx$$

Usando los teoremas operacionales:

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right] = (i\omega)^2\hat{u}(\omega,t) = -\omega^2\hat{u}(\omega,t)$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right] = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega,t)$$

$$\mathcal{F}[u(x,0)] = \mathcal{F}\left[e^{-x^2/2}\right] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}\left[e^{\frac{-1\cdot x^2}{2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 1}}e^{\frac{-\omega^2}{2\cdot 1}} \quad \Rightarrow \quad \hat{u}(\omega,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\omega^2/2}$$

El problema se reescribe en términos de transformadas de Fourier

$$\begin{cases} -\omega^2\hat{u}(\omega,t) = \dfrac{\partial \hat{u}(\omega,t)}{\partial t} \quad \text{si} \quad -\infty < \omega < \infty \ , \ t > 0 \\ \hat{u}(\omega,0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\omega^2/2} \quad \text{si} \quad -\infty < \omega < \infty \end{cases}$$

Y luego se resuelve la ecuación diferencial:

$$-\omega^2\hat{u}(\omega,t)=\frac{\partial\hat{u}(\omega,t)}{\partial t}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial\hat{u}(\omega,t)}{\partial t}+\omega^2\hat{u}(\omega,t)=0$$

Cuya solución general es

$$\hat{u}(\omega,t)=C(\omega)e^{-\omega^2 t}\qquad \text{si}\ \ -\infty<\omega<\infty\ ,\ \ t>0$$

Se encuentra la constante $C(\omega)$ con la condición inicial:

$$\hat{u}(\omega,0)=C(\omega)e^{-\omega^2\cdot 0}=C(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\omega^2/2}$$

Sustituyendo la constante se obtiene la solución acotada $|\hat{u}(\omega,t)|<\infty$ cuya transformada inversa de Fourier existe por que $\hat{u}(\omega,t)\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

$$\hat{u}(\omega,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\omega^2/2}\cdot e^{-\omega^2 t}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{1}{2}+t\right)\omega^2}\quad \text{si}\ \ -\infty<\omega<\infty\ ,\ \ t>0$$

Luego se recupera la función $u(x,t)$ mediante la transformada inversa de Fourier:

$$u(x,t)\equiv\mathcal{F}^{-1}[\hat{u}(\omega,t)]=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{u}(\omega,t)e^{i\omega x}dx$$

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{u}(\omega,t)e^{i\omega x}d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{1}{2}+t\right)\omega^2}e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{1}{2}+t\right)\omega^2}e^{-i\omega(-x)}d\omega$$

$$=\mathcal{F}\left[\sqrt{2\pi}\cdot e^{-\left(\frac{1}{2}+t\right)\omega^2}\right]\Bigg|_{-x}=\sqrt{2\pi}\cdot\mathcal{F}\left[e^{-\left(\frac{2}{2}+2t\right)\frac{\omega^2}{2}}\right]\Bigg|_{-x}=\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\frac{2}{2}+2t\right)}}e^{\frac{-x^2}{2\left(\frac{2}{2}+2t\right)}}\Bigg|_{-x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+2t}}e^{\frac{-(-x)^2}{1+2t}}=\frac{e^{\frac{-x^2}{2t+1}}}{\sqrt{2t+1}}$$

La solución $u(x,t)$ al problema explícitamente es

$$u(x,t)=\frac{\exp\left(\dfrac{-x^2}{2t+1}\right)}{\sqrt{2t+1}}\qquad \text{si}\quad x>0\ ,\ \ t>0$$

PROBLEMA 20

Encuentre la función acotada $u(x,t)$ tal que satisfaga el siguiente problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} & \text{si} \quad x > 0 \quad , \quad t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 & \text{si} \quad t > 0 \\ u(x,0) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Hay que extender la variable x a $-\infty < x < \infty$. Para esto, se elimina la condición de borde nula $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$ y se extiende la función $u(x,0) = e^{-x^2/2}$ como una función par:

$$f(x) = \begin{cases} u(-x,0) & \text{si} \quad x < 0 \\ u(x,0) & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

Con la variable x extendida a todos los números reales, se replantea el problema como:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} & \text{si} \quad -\infty < x < \infty \quad , \quad t > 0 \\ u(x,0) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si} \quad -\infty < x < \infty \end{cases}$$

Ahora se puede aplicar la transformada de Fourier respecto a la variable x definida por

$$\hat{u}(\omega,t) \equiv \mathcal{F}[u(x,t)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega x}dx$$

Usando los teoremas operacionales:

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right] = (i\omega)^2\hat{u}(\omega,t) = -\omega^2\hat{u}(\omega,t)$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right] = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega,t)$$

$$\mathcal{F}[u(x,0)] = \mathcal{F}\left[\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}\left[\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right] = \frac{1}{2}\cdot 1_{(-1,1)}(\omega) \quad \Rightarrow \quad \hat{u}(\omega,0) = \frac{1}{2}\cdot 1_{(-1,1)}(\omega)$$

El problema se reescribe en términos de transformadas de Fourier

$$\begin{cases} -\omega^2\hat{u}(\omega,t) = \dfrac{\partial \hat{u}(\omega,t)}{\partial t} & \text{si} \quad -\infty < \omega < \infty \ , \ t > 0 \\ \hat{u}(\omega,0) = \dfrac{1}{2}\cdot 1_{(-1,1)}(\omega) & \text{si} \quad -\infty < \omega < \infty \end{cases}$$

Y luego se resuelve la ecuación diferencial:

$$-\omega^2 \hat{u}(\omega,t) = \frac{\partial \hat{u}(\omega,t)}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \hat{u}(\omega,t)}{\partial t} + \omega^2 \hat{u}(\omega,t) = 0$$

Cuya solución general es

$$\hat{u}(\omega,t) = C(\omega)e^{-\omega^2 t} \qquad \text{si} \quad -\infty < \omega < \infty \ , \ \ t > 0$$

Se encuentra la constante $C(\omega)$ con la condición inicial:

$$\hat{u}(\omega,0) = C(\omega)e^{-\omega^2 \cdot 0} = C(\omega) = \frac{1}{2} \cdot 1_{(-1,1)}(\omega)$$

Sustituyendo la constante se obtiene la solución acotada $|\hat{u}(\omega,t)| < \infty$ cuya transformada inversa de Fourier existe por que $\hat{u}(\omega,t) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

$$\hat{u}(\omega,t) = \frac{1}{2} \cdot 1_{(-1,1)}(\omega) \cdot e^{-\omega^2 t} \quad \text{si} \quad -\infty < \omega < \infty \ , \ \ t > 0$$

Luego se recupera la función $u(x,t)$ mediante la transformada inversa de Fourier:

$$u(x,t) \equiv \mathcal{F}^{-1}[\hat{u}(\omega,t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega,t)e^{i\omega x}dx$$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega,t)e^{i\omega x}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot 1_{(-1,1)}(\omega) \cdot e^{-\omega^2 t}e^{i\omega x}d\omega = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-\omega^2 t}e^{i\omega x}d\omega$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-\omega^2 t}(\cos(\omega x) + i\,\mathrm{sen}(\omega x))d\omega = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-\omega^2 t}\cos(\omega x)\,d\omega + \frac{i}{2}\int_{-1}^{1} e^{-\omega^2 t}\,\mathrm{sen}(\omega x)\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-\omega^2 t}\cos(\omega x)\,d\omega + 0 = \frac{1}{2} \cdot 2\int_{0}^{1} e^{-\omega^2 t}\cos(\omega x)\,d\omega = \int_{0}^{1} e^{-\omega^2 t}\cos(\omega x)\,d\omega$$

La integral que contiene la función seno se anula por ser una función impar y se reescribe la integral del coseno en el intervalo [0,1] por ser una función par. Esta integral no se puede resolver analíticamente, por lo tanto la solución $u(x,t)$ del problema se expresa como

$$u(x,t) = \int_{0}^{1} e^{-\omega^2 t}\cos(\omega x)\,d\omega \qquad \text{si} \quad x > 0 \ , \ \ t > 0$$

PROBLEMA 21

Sea $u(x,y)$ una función acotada tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad \text{si} \quad x>0\ ,\ y>0 \\ u(x,0)=0 \\ u(0,y)=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

(a) Demuestre que la solución del problema es

$$u(x,y)=\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(\omega y)}{\omega} e^{-x|\omega|} d\omega$$

(b) Resuelva la integral de la parte (a) y muestre que

$$u(x,y)=\arctan(y/x)$$

SOLUCIÓN:

Hay que extender la variable y a $-\infty<y<\infty$. Para esto, se elimina la condición de borde nula $u(x,0)=0$ y se extiende la función $u(0,y)=f(y)$ como una función impar:

$$f(y)=\begin{cases} -\pi/2 \quad \text{si} \quad y<0 \\ \\ \pi/2 \quad \text{si} \quad y\geq 0 \end{cases}$$

Con la variable y extendida a todos los números reales, se replantea el problema como:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad \text{si} \quad x>0\ ,\ -\infty<y<\infty \\ \\ u(0,y)=f(y) \quad \text{si} \quad -\infty<y<\infty \end{cases}$$

Ahora se puede aplicar la transformada de Fourier respecto a la variable y definida por

$$\hat{u}(x,\omega)\equiv \mathcal{F}[u(x,y)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y)e^{-i\omega y}dy$$

Usando los teoremas operacionales:

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}\right]=\frac{\partial^2 \hat{u}(x,\omega)}{\partial x^2}$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}\right]=(i\omega)^2\hat{u}(x,\omega)=-\omega^2\hat{u}(x,\omega)$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]+\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \hat{u}(x,\omega)}{\partial x^2}-\omega^2\hat{u}(x,\omega)=0$$

La solución a esta ecuación es

$$\hat{u}(x,\omega) = C_1(\omega)e^{-|\omega|x} + C_2(\omega)e^{|\omega|x} \qquad \text{si} \quad x > 0 \ , \quad -\infty < y < \infty$$

Para que la solución $w(x,y)$ sea acotada, la solución en transformada de Fourier también debe ser acotada $|\hat{u}(x,\omega)| < \infty$. Así, el coeficiente $C_2(\omega) = 0$ para que esta solución sea una función acotada.

$$\hat{u}(x,\omega) = C_1(\omega)e^{-|\omega|x} \qquad \text{si} \quad x > 0 \ , \quad -\infty < \omega < \infty$$

Se determina el coeficiente $C_1(\omega)$ utilizando la condición de borde.

$$f(y) = \begin{cases} -\pi/2 & \text{si} \quad y < 0 \\ \\ \pi/2 & \text{si} \quad y \geq 0 \end{cases}$$

La derivada generalizada de $f(y)$ es

$$f'_{gen}(y) = \pi\, \delta(y)$$

Por lo tanto

$$\mathcal{F}[\delta(y)] = \frac{1}{2\pi}$$

$$\mathcal{F}\left[f'_{gen}(y)\right] = \mathcal{F}[\pi\, \delta(y)] \ \Rightarrow \ i\omega\hat{f}(\omega) = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{f}(\omega) = \frac{1}{2i\omega}$$

$$\mathcal{F}[u(0,y)] = \mathcal{F}[f(y)] \ \ \Rightarrow \hat{u}(0,\omega) = \hat{f}(\omega)$$

$$\hat{u}(0,\omega) = C_1(\omega)e^{-|\omega|\cdot 0} = C_1(\omega) = \frac{1}{2i\omega}$$

Por lo tanto, la solución en transformada de Fourier es

$$\hat{u}(x,\omega) = \frac{1}{2i\omega}e^{-|\omega|x} \qquad \text{si} \quad x > 0 \ , \quad -\infty < \omega < \infty$$

Se recupera la función $u(x,y)$ por medio de la transformada inversa de Fourier

$$u(x,y) \equiv \mathcal{F}^{-1}[\hat{u}(x,\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(x,\omega)e^{i\omega y}d\omega$$

Así

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2i\omega}e^{-|\omega|x}e^{i\omega y}d\omega = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega}e^{-|\omega|x}\left(\frac{\cos(\omega y) + i\,\mathrm{sen}(\omega y)}{i}\right)d\omega =$$

$$-i\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega}e^{-|\omega|x}\cos(\omega y)\,d\omega + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega}e^{-|\omega|x}\,\mathrm{sen}(\omega y)\,d\omega$$

(a) La integral del coseno es cero, ya que el integrando es una función impar en ω y la integral del seno es una función par, así

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega}e^{-|\omega|x}\operatorname{sen}(\omega y)\,d\omega=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(\omega y)}{\omega}e^{-x|\omega|}d\omega=\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(\omega y)}{\omega}e^{-x|\omega|}d\omega$$

(b) Utilizando el teorema de Parseval. Si $f,g\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\,\overline{G(\omega)}d\omega=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\hat{F}(\theta)\overline{\hat{G}(\theta)}\,d\theta$$

Como

$$F(\omega)=\frac{\operatorname{sen}(\omega y)}{\omega}\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$$

$$G(\omega)=e^{-x|\omega|}\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$$

Definiendo la transformada de Fourier respecto a la variable ω como:

$$\hat{F}(\theta)\equiv\mathcal{F}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{-i\omega\theta}d\omega$$

Así

$$\mathcal{F}[F(\omega)]=\mathcal{F}\left[\frac{\operatorname{sen}(\omega y)}{\omega}\right]\Rightarrow\ \hat{F}(\theta)=\frac{1}{2}\,1_{(-y,y)}(\theta)$$

$$\mathcal{F}[G(\omega)]=\mathcal{F}\left[e^{-x|\omega|}\right]=\mathcal{F}\left[\overline{G(\omega)}\right]\quad\Rightarrow\quad\hat{G}(\theta)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x}{x^2+\theta^2}=\ \overline{\hat{G}(\theta)}$$

Luego, se aplica el teorema de Parseval

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\omega y}{\omega}e^{-x|\omega|}d\omega=\frac{2\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\,1_{(-y,y)}(\theta)\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x}{x^2+\theta^2}d\theta=\frac{1}{2}\int_{-y}^{y}\frac{x}{x^2+\theta^2}d\theta$$

$$=\frac{1}{2x}\int_{-y}^{y}\frac{1}{1+\left(\frac{\theta}{x}\right)^2}d\theta=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\theta}{x}\right)\Bigg|_{-y}^{y}=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{-y}{x}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Por lo tanto la solución en $x>0$, $y>0$ es

$$u(x,y)=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

PROBLEMA 22

Sea $c > 0$ y las funciones $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sea $u(x,t)$ una función que satisface la ecuación de la onda

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{si} \quad -\infty < x < \infty \quad , \quad t > 0 \\ \quad u(x,0) = f(x) \quad \text{si} \quad -\infty < x < \infty \\ \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \quad \text{si} \quad -\infty < x < \infty \end{cases}$$

Muestre que la solución a este problema es la fórmula de D'Alembert:

$$u(x,t) = \frac{f(x-ct) + f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

SOLUCIÓN:

Aplicando transformadas de Fourier a la ecuación diferencial y a las condiciones iniciales definiendo la transformada de Fourier como

$$\hat{u}(\omega,t) \equiv \mathcal{F}[u(x,t)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-i\omega x} dx$$

$$\mathcal{F}[u(x,t)] = \hat{u}(\omega,t)$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\right] = \frac{\partial^2 \hat{u}(\omega,t)}{\partial t^2}$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right] = (i\omega)^2 \hat{u}(\omega,t) = -\omega^2 \hat{u}(\omega,t)$$

$$\mathcal{F}[u(x,0)] = \mathcal{F}[f(x)] \quad \Rightarrow \quad \hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega)$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\right] = \mathcal{F}[g(x)] \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega,0) = \hat{g}(\omega)$$

La ecuación diferencial en términos de transformadas de Fourier se expresa como

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \hat{u}(\omega,t)}{\partial t^2} = -c^2\omega^2 \hat{u}(\omega,t) \quad \text{si} \quad -\infty < \omega < \infty \quad , \quad t > 0 \\ \quad \hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega) \quad \text{si} \quad -\infty < \omega < \infty \\ \quad \dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega,0) = \hat{g}(\omega) \quad \text{si} \quad -\infty < \omega < \infty \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{u}(\omega,t)}{\partial t^2} = -c^2\omega^2 \hat{u}(\omega,t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \hat{u}(\omega,t)}{\partial t^2} + c^2\omega^2 \hat{u}(\omega,t) = 0$$

Cuya solución general es

$$\hat{u}(\omega,t) = C_1(\omega)\cos(c\omega t) + C_2(\omega)\,\text{sen}(c\omega t)$$

Aplicando las condiciones iniciales

$$\hat{u}(\omega,0)=\hat{f}(\omega)\Rightarrow \hat{u}(\omega,0)=C_1(\omega)\cos(0)+C_2(\omega)\operatorname{sen}(0)=\hat{f}(\omega)\Rightarrow C_1(\omega)=\hat{f}(\omega)$$

$$\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}(\omega,t)=c\omega(-C_1(\omega)\operatorname{sen}(c\omega t)+C_2(\omega)\cos(c\omega t))$$

$$\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}(\omega,0)=\hat{g}(\omega)\Rightarrow c\omega(-C_1(\omega)\operatorname{sen}(0)+C_2(\omega)\cos(0))=\hat{g}(\omega)\Rightarrow C_2(\omega)=\frac{1}{c\omega}\hat{g}(\omega)$$

$$\hat{u}(\omega,t)=\hat{f}(\omega)\cos(c\omega t)+\hat{g}(\omega)\frac{\operatorname{sen}(c\omega t)}{c\omega}\qquad \text{si}\ \ -\infty<\omega<\infty\ ,\ \ t>0$$

Luego se recupera la función mediante la transformada inversa de Fourier definida por

$$u(x,t)\equiv\mathcal{F}^{-1}[\hat{u}(\omega,t)]=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{u}(\omega,t)\,e^{i\omega x}dx$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{u}(\omega,t)]=\mathcal{F}^{-1}\big[\hat{f}(\omega)\cos(c\omega t)\big]+\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{g}(\omega)\frac{\operatorname{sen}(c\omega t)}{c\omega}\right]$$

Obteniendo la transformada inversa de Fourier al primer factor:

$$\hat{f}(\omega)\cos(c\omega t)=\hat{f}(\omega)\frac{e^{ic\omega t}+e^{-ic\omega t}}{2}=\frac{1}{2}\hat{f}(\omega)e^{ic\omega t}+\frac{1}{2}\hat{f}(\omega)e^{-ic\omega t}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{2}\hat{f}(\omega)e^{ic\omega t}+\frac{1}{2}\hat{f}(\omega)e^{-ic\omega t}\right]\ =\ \frac{1}{2}f(x+ct)+\frac{1}{2}f(x-ct)=\frac{f(x-ct)+f(x+ct)}{2}$$

Se obtiene la transformada inversa de Fourier al segundo factor con el teorema de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(\theta)\overline{g(\theta)}d\theta=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}d\omega\qquad\Rightarrow\qquad\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\theta)\overline{g(\theta)}d\theta$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{g}(\omega)\frac{\operatorname{sen}(c\omega t)}{c\omega}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(\omega)\frac{\operatorname{sen}(c\omega t)}{c\omega}e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(c\omega t)}{\omega}\overline{\hat{g}(\omega)e^{-\imath\omega x}}\,d\omega=$$

$$=\frac{\pi}{2\pi c}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\operatorname{sen}(c\omega t)}{\omega}\right]\overline{\mathcal{F}^{-1}[\hat{g}(\omega)e^{-\imath\omega x}]}\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{\infty}1_{(-ct,ct)}(\theta)\cdot g(\theta-x)\,d\theta=\frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{\infty}1_{(x-ct\,,x+ct)}(\theta)\cdot g(\theta)\,d\theta=\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(\theta)d\theta$$

Finalmente la solución al problema de la onda es

$$u(x,t)=\ \frac{f(x-ct)+f(x+ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(\theta)d\theta\quad\ \text{si}\ \ \ x\in\mathbb{R}\ \ ,\ \ \ t>0$$

PROBLEMA 1

Una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cumple $f(x+\pi) = f(x)$, $f(-x) = f(x)$ y para $0 \le x \le \pi$ está definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \le x < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si} \quad \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$

(a) Halle la serie de Fourier π-periódica de $f(x)$.

(b) ¿A qué valor converge la serie de Fourier de f en $x = \pi/2$ y en $x = \pi$? Justifique.

(c) Demuestre que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

PROBLEMA 2

Sea $\Psi > 0$. Encuentre explícitamente la función $u(x,y)$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{si} \quad x > 0 \ , \ y > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0 \\ u(x,0) = \dfrac{\Psi}{\Psi^2 + x^2} \\ |u(x,y)| \le k < \infty \quad \text{para algún } k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

PROBLEMA 3

Encuentre la función $u(x,t)$ tal que satisface el problema de la onda

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{si} \quad 0 < x < 1 \ , \ t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = x(1-x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \operatorname{sen}(2\pi x) \end{cases}$$

PROBLEMA 4

Sea $a > 0, b > 0$. Usando transformadas de Fourier demuestre la siguiente fórmula

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{x(x^2+b^2)} dx = \frac{\pi}{2b^2}\left(1 - e^{-ab}\right)$$

Respuestas:

Problema 1

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n}$$

(b) Converge a 1/2 y a 0 respectivamente

Problema 2

$$u(x,y) = \frac{y+\Psi}{x^2 + (y+\Psi)^2}$$

Problema 3

$$u(x,t) = \operatorname{sen}(2\pi x)\cos(2\pi t) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi n^4} \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{sen}(n\pi t)$$

PROBLEMA 1

Una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cumple $f(x+\pi) = f(x)$, $f(-x) = -f(x)$ y para $0 \le x \le \pi$ está definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x \ \text{ si } \ 0 \le x < \dfrac{\pi}{2} \\ \pi - x \ \text{ si } \ \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$

(a) Calcule la transformada de Fourier de la función $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = f(x) \cdot 1_{(0,\pi)}(x) - f(x) \cdot 1_{(-\pi,0)}(x)$$

(b) Halle la serie de Fourier π-periódica de $f(x)$. **Sugerencia:** Puede utilizar la parte (a).

(c) Demuestre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{2}{3} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \right)^2$$

PROBLEMA 2

Encuentre <u>explícitamente</u> la función $u(x,y)$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ si } \quad 0 < x < 1 \ , \ 0 < y < 1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y) = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u(x,1) = 2\cos^2(\pi x) \end{cases}$$

PROBLEMA 3

Encuentre <u>explícitamente</u> la función $u(x,t)$ tal que satisface el problema de conducción de calor

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} \quad \text{ si } \quad x > 0 \ , \ t > 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(x,0) = xe^{-x^2/2} \\ \lim\limits_{t\to\infty} u(x,t) = 0 \end{cases}$$

Respuestas:

Problema 1

$$\hat{f}(\omega) = \frac{i}{\pi\omega^2}\left(\operatorname{sen}(\pi\omega) - 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)\right)$$

$$b_n = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n^2}$$

Problema 2

$$u(x,y) = y + \frac{\operatorname{senh}(2\pi y)}{\operatorname{senh}(2\pi)}\cos(2\pi x)$$

Problema 3

$$u(x,t) = \frac{xe^{\frac{-x^2}{4t+2}}}{\sqrt{2t+1}}$$